Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 23 Studia Mathematica IV (2004)

Zenon Moszner

Sur la fonction de choix et la fonction d'indice

Dédié à M. le Professeur Andrzej Zajtz, mon Collegue,
à l'occasion de son 70 ème anniversaire

Résumé. On considère quelques problèmes au sujet des solutions des équations fonctionnelles conditionnelles

$$F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) \neq \emptyset \implies F(\mathbf{xy}) = F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}), \qquad (*)$$

où $F\colon E^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n \longrightarrow 2^E \setminus \{\emptyset\}$, E est un ensemble arbitraire et pour chaque $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ de E^*, $\mathbf{xy} = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, et

$$f(a) \cdot f(b) \neq \underline{0} \implies f(a + b) = f(a) \cdot f(b), \qquad (**)$$

où

$$f\colon A(p) = \{(a_1, \ldots, a_p) \in A^p : \ a_k \geq 0\} \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow B(p),$$

$A, B \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbf{A} = \text{le corps des nombres algébriques}, \mathbb{R}\}$, $\underline{0} = (0, \ldots, 0) \in A^p$, $a = (a_1, \ldots, a_p) \in A(p)$, $b = (b_1, \ldots, b_p) \in A(p)$, $a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_p + b_p)$, $a \cdot b = (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_p \cdot b_p)$. Entre autres, sous quelles conditions, pour la solution F de $(*)$ (la fonction de choix), $F(\mathbf{xy})$ est-elle une fonction de $F(\mathbf{x})$ et $F(\mathbf{y})$, ou pour la solution f de $(**)$ (la fonction d'indice), $f(a+b)$ est-elle une fonction de $f(a)$ et $f(b)$, quand la solution de $(*)$ est en même temps une solution du conséquent de l'implication $(*)$ et est-ce que le prolongement de la solution de $(**)$ existe ? On considère aussi les modifications de l'équation $(**)$, entre autres l'équation suivante

$$f(a) \cdot f(b) = \underline{0} \iff f(a + b) = f(a) \cdot f(b) \qquad (***)$$

et les inclusions (les équations) pour les fonctions multi-valentes $Z(t)$, liées aux équations $(**)$ et $(***)$, de la forme suivante

$$\bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)} + \bigcap_{t \in T} Z(t)^{j(t)} \subset \bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)j(t)}$$
$$\Big(\bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)} + \bigcap_{t \in T} Z(t)^{j(t)} = \bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)j(t)} \Big) \qquad (****)$$

AMS (2000) Subject Classification: 39B22.

et les inclusions (les équations) conditionnelles

$$\exists_{t\in T} :\ i(t)j(t) \neq 0 \iff (****) \quad \text{et} \quad \forall_{t\in T} :\ i(t)j(t) = 0 \iff (****),$$

où T est un ensemble arbitraire, $(G, +)$ est un groupoïde, $Z(t)\colon T \longrightarrow 2^G$ est une fonction cherchée, $Z(t)^1 = Z(t)$, $Z(t)^0 = G \setminus Z(t)$, qui doivent avoir lieu pour chaques fonctions $i(t), j(t)\colon T \longrightarrow \{0, 1\}$ non-idéntiques zéro. On pose aussi quelques problèmes ouverts.

1. Function de choix

F.S. Roberts a introduit dans [13] et [14] une fonction, qui peut être nommée la fonction de choix, de la manière suivante. Soit E un ensemble non-vide et définissons la fonction $F\colon E^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n \longrightarrow 2^E \setminus \{\emptyset\}$ comme il suit

$$F(x_1, \dots, x_n) \ \text{est l'ensemble des éléments de } E \text{ qui paraissent le plus souvent dans la suite } x_1, \dots, x_n\,. \tag{1}$$

On peut interpréter la valeur $F(x_1, \dots, x_n)$ comme le résultat de l'élection : l'électeur premier donne sa voix au candidat x_1, le deuxième au candidat x_2 et caetera, l'ensemble $F(x_1, \dots, x_n)$ est l'ensemble des candidats qui recevoient le plus des voix.

Cette fonction F remplit la condition suivante [13]

$$\begin{aligned} &F(x_1, \dots, x_n) \cap (F(y_1, \dots, y_m) \neq \emptyset \\ &\qquad \implies F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = F(x_1, \dots, x_n) \cap F(y_1, \dots, y_m), \end{aligned} \tag{2}$$

pour chaques n et m entiers et positifs, en abrégé

$$F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) \neq \emptyset \implies F(\mathbf{xy}) = F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) \tag{2'}$$

pour chaque $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ de E^*, $\mathbf{xy} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, qui a l'interprétation suivante : si pour deux circonscriptions avec les élections $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_m$ il existe au moins un candidat qui a gagné l'élection dans ces deux circonsciptions alors dans la circonscription commune de ces deux régions ces candidats et seulement ces candidats ont gagnés l'élection qui ont gagnés le choix dans chaque de ces deux régions. Nous nommons la solution F de (2) *la fonction de choix.*

L'équation

$$\begin{gathered} F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = F(x_1, \dots, x_n) \cap F(y_1, \dots, y_m) \\ (F(\mathbf{xy}) = F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y})) \end{gathered} \tag{3}$$

dans le conséquent de l'implication (2) ou de l'implication (2′) est conditionnelle : nous pouvons exprimer $F(\mathbf{xy})$ comme une fonction de $F(\mathbf{x})$ et de $F(\mathbf{y})$

mais sous la restriction que $F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) \neq \emptyset$. Nous nommons pour cette raison la condition (2) ou (2′) l'équation fonctionnelle conditionnelle. Il se pose la question : est-ce qu'on peut exprimer $F(\mathbf{xy})$ comme une fonction de $F(\mathbf{x})$ et de $F(\mathbf{y})$ sans aucune restriction ? La réponse à cette question est négative. En effet, supposons qu'il existe une fonction ϕ telle que

$$F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \phi\left[F(x_1, \ldots, x_n), F(y_1, \ldots, y_m)\right] \tag{4}$$

pour chaques n et m entiers et positifs ou en abrégé

$$F(\mathbf{xy}) = \phi\left[F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})\right] \tag{4′}$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^*$. Dans ce cas, pour $x, y \in E$, $x \neq y$

$$\{x\} = F(x, x, y) = \phi\left[F(x, x), F(y)\right] = \phi\left[F(x), F(y)\right] = F(x, y) = \{x, y\},$$

donc une contradiction.

Il existe des functions qui remplissent (2) et pour lesquelles il existe une fonction ϕ satisfaisante à (4). Telle est chaque fonction remplissante (3) (par ex. chaque fonction constante) et aussi la fonction $F(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1\}$, qui remplit (2), ne satisfait pas à (3) et pour laquelle la fonction $\phi(\{x\}, \{y\}) = \{x\}$ satisfait à (4).

Remarquons que la fonction F vérifiant (2) satisfait à (3) si et seulement si $F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) \neq \emptyset$ pour chaque $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^*$. Cela ne désigne pas que

$$\bigcap_{x \in E^*} F(\mathbf{x}) \neq \emptyset. \tag{5}$$

En effet, si E est infini, (3) est remplie pour la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_n) = E \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \tag{6}$$

et la condition (5) n'a pas lieu. Pour E fini la fonction (6) n'est pas bonne puisque elle prend comme la valeur l'ensemble vide $\emptyset$.

La fonction F qui satisfait au conséquent de (2) doit être symétrique, puisque l'intersection des ensembles est commutative. On voit plus haut que cette symétrie ne suffit pas et elle n'est pas nécéssaire pour que la fonction F remplisse (2).

Il se pose donc la question : quelle est la condition suffisante et nécessaire au sujet d'une fonction F satisfaisante à (2) pour qu'il existe la fonction ϕ vérifiant (4) pour cette fonction F ? La réponse a cette question donne le

Théorème 1
Il existe une fonction ϕ satisfaisante à (4) *pour la fonction F vérifiant* (2) *si et seulement si*

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{u}) \quad et \quad F(\mathbf{y}) = F(\mathbf{v}) \quad et \quad F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) = \emptyset \implies F(\mathbf{xy}) = F(\mathbf{uv})$$

pour chaques $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^*$.

Démonstration. L'implication ,,seulement si" est évidente. Pour la démonstration de ,,si" remarquons que la fonction $\phi\colon \left(2^E \setminus \{\emptyset\}\right) \longrightarrow 2^E$ définie pour $B, C \in F(E^*)$ comme il suit

$$\phi(B, C) = F(\mathbf{xy}) \qquad \text{pour } F(\mathbf{x}) = B \text{ et } F(\mathbf{y}) = C$$

et arbitraire sinon, ne dépend pas du choix de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ et elle remplit $(4')$.

On peut donner l'interprétation suivante de cette condition. Considérons la relation R définie comme il suit

$$\mathbf{x}R\mathbf{y} \iff F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$$

pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^*$. Les classes d'équivalence de cette relation sont nommées les noyaux de la fonction F. La condition en question désigne pour la fonction F vérifiant (2) que la relation R est compatible avec l'opération $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{xy}$ (elle est une congruence).

Remarquons que la fonction ϕ vérifiant (4) doit avoir la propriété de l'associativité sur l'ensemble $F(E^*) \times F(E^*)$, c. à d.

$$\phi\left[\phi(B, C), D\right] = \phi\left[B, \phi(C, D)\right] \qquad \text{pour } B, C, D \in F(E^*).$$

Inversement, il existe pour chaque fonction $\phi\colon \left(2^E \setminus \{\emptyset\}\right) \times \left(2^E \setminus \{\emptyset\}\right) \longrightarrow \left(2^E \setminus \{\emptyset\}\right)$ associative une fonction $F\colon E^* \longrightarrow \left(2^E \setminus \{\emptyset\}\right)$ vérifiant (4). En effet, il suffit de prendre $F\colon E \longrightarrow \left(2^E \setminus \{\emptyset\}\right)$ arbitraire et définir F sur $E^* \setminus E$ récursivement par la formule

$$F(\mathbf{x}y) = \phi\left[F(\mathbf{x}), F(y)\right] \qquad \text{pour } \mathbf{y} \in E^* \text{ et } y \in E.$$

De plus, chaque fonction F qui remplit (4) avec ϕ donnée doit être obtenue par cette méthode. Cette fonction F naturellement ne doit pas satisfaire à (2). Elle remplit (2) si $\phi(B, C) = B \cap C$ pour $B \cap C \neq \emptyset$.

2. Fonction d'indice

Supposons à présent que l'ensemble E a p éléments $v_1, \ldots, v_p$ et soit $x_1, \ldots,\ x_n$ la suite des éléments de E telle que nous avons au début a_1 fois l'élément v_1, puis a_2 fois l'élément v_2, et caetera, a_p fois l'élément v_p, où $a_1, \dots, a_p$ sont des nombres entiers non-négatifs et $a_1 + \dots + a_p = n$. Soit $\mathbb{Z}(p)$ l'ensemble de toutes suites de p éléments des nombres non-négatifs et entiers sauf la suite de zéros, désignée dans la suite par $\underline{0}$. Nous allons définir la fonction nouvelle

$$f = (f_1, \dots, f_p) \colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow O(p) := \{0,1\}^p \setminus \{\underline{0}\}$$

par l'équivalence suivante

$$f_k(a_1, \dots, a_p) = 1 \iff v_k \in F(x_1, \dots, x_n), \tag{7}$$

où la fonction F est définie dans (1), ou bien par l'équivalence

$$f_k(a_1, \dots, a_p) = 1 \iff a_k \geq a_i \qquad \text{pour } i = 1, \dots, p. \tag{8}$$

Cette fonction f est nommée la fonction d'indice puisque elle indique par ses valeurs 1 quels sont les candidats qui gagnent l'élection. Cette fonction f remplit la condition suivante [14]

$$f(a) \cdot f(b) \neq \underline{0} \implies f(a+b) = f(a) \cdot f(b), \tag{9}$$

où $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}(p)$, $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{Z}(p)$, $a+b = (a_1+b_1, \dots, a_p+b_p)$, $a \cdot b = (a_1 \cdot b_1, \dots, a_p \cdot b_p)$. Nous nommons dans la suite par la fonction d'indice chaque solution de l'équation conditionnelle (9). La relation $f(a) \cdot f(b) \neq \underline{0}$ désigne que des vecteurs $f(a) = (f_1(a), \dots, f_p(a))$ et $f(b) = (f_1(b), \dots, f_p(b))$ ne sont pas orthogonaux puisque elle est équivalente à la condition $f_1(a)f_1(b) + \dots + f_p(a)f_p(b) \neq 0$, car chaque des fonctions f_k $(k = 1, \dots, p)$ a seulement les valeurs non-négatives.

Il existe des solutions de cette équation qui ne sont pas de la forme (8) et cette équation a déjà sa théorie (voir [1]-[6] et [9]-[17]). En particulier chaque solution $f = (f_1, \dots, f_p)$ de (9) a la forme suivante

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in Z_k\,, \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{Z}(p) \setminus Z_k\,, \end{cases} \tag{10}$$

pour $k = 1, \dots, p$, où les ensembles $Z_1, \dots, Z_p$ remplissent les conditions

$$Z_1 \cup \ldots \cup Z_p = \mathbb{Z}(p), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &(i_1 j_1, \dots, i_p j_p) \neq \underline{0} \\ &\qquad \implies Z_p^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \subset Z_1^{i_1 j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p j_p}, \end{aligned} \tag{12}$$

pour tous $i_k, j_k \in \{0,1\}$, où $Z_i^1 = Z_i$, $Z_i^0 = \mathbb{Z}(p) \setminus Z_i$ pour $i = 1, \dots, p$ et $E_1 + E_2 := \{a + b : \ a \in E_1,\ b \in E_2\}$ pour $E_1, E_2 \subset \mathbb{Z}(p)$ (voir [9], où la démonstration est donnée pour les nombres réels au lieu des nombres entiers, dans notre cas la démonstration est la même) et réciproquement.

Les ensembles Z_k vérifiant (11) et (12) sont fermés par rapport à l'addition. En effet pour chaque $a \in \mathbb{Z}(p)$ et pour chaque $j \in \{1,\dots,p\}$ il existe un $i_j(a)$ tel que $a \in Z_j^{i_j(a)}$. Supposons que $c \in Z_k$ et $d \in Z_k$, donc $i_k(c) = 1 = i_k(d)$. Donc de plus, d'après (12)

$$\begin{aligned} c + d &\in Z_1^{i_1(c)} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p(c)} + Z_1^{i_1(d)} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p(d)} \\ &\subset Z_1^{i_1(c) i_1(d)} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p(c) i_p(d)} \subset Z_k^{i_k(c) i_k(d)} \\ &= Z_k\,. \end{aligned}$$

Il est intéressant que la condition (12) est équivalente à la suivante [3]

$$\begin{aligned} \forall_{k,l\in\{1,\dots,p\}} \forall_{i_1,i_2,j_1,j_2\in\{0,1\}} :\ (i_1 j_1, i_2 j_2) \neq (0,0) \implies \\ Z_k^{i_1} \cap Z_l^{i_2} + Z_k^{j_1} \cap Z_l^{j_2} \subset Z_k^{i_1 j_1} \cap Z_l^{i_2 j_2}, \end{aligned} \tag{12'}$$

c. à d. à la condition de la forme (12) mais demandée seulement pour chaque deux ensembles parmi les ensembles $Z_1, \dots, Z_p$. Remarquons que nous avons $2^{2p-1} + 2^{p-1} - 2^{-1}(3^p + 1)$ inclusions essentielles (c. à d. différentes et pour $(i_1 j_1, \dots, i_p j_p) \neq \underline{0}$), qui nous trouvons dans le conséquent de (12) et il y a seulement $2^{-1}p(5p-3)$ inclusions de cette sorte (pour $(i_1 j_1, i_2 j_2) \neq (0,0)$) dans le conséquent de (12′) (alors moins si $p > 2$). Les autres conditions équivalentes à (12) sont données dans [3]. Remarquons enfin que p^2 est le nombre le plus petit des conditions équivalentes à (12) et ces sont les conditions suivantes [3]

$$\begin{aligned} &\forall_{k\in\{1,\dots,p\}} :\ Z_k + Z_k \subset Z_k \\ \text{et} \\ &\forall_{k,l\in\{1,\dots,p\},\, k\neq l} :\ Z_k + Z_k \cap Z_l^0 \subset Z_k \cap Z_l^0. \end{aligned} \tag{12''}$$

Ces conditions forment un système des relations *indépendantes* entre les ensembles $Z_1, \dots, Z_p$. En effet, considérons les deux exemples suivants.

EXEMPLE 1
Si pour un $j \in \{1,\dots,p\}$ $Z_j = \{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{Z}(p) : x_2 = \ldots = x_p = 0$ ou $x_1 = x_3 = \ldots = x_p = 0\}$, $Z_i = \mathbb{Z}(p)$ pour chaque $i = 1,\dots,p$, $i \neq j$, dans ce cas seulement l'inclusion $Z_j + Z_j \subset Z_j$ n'a pas lieu parmi les relations (12″).

EXEMPLE 2
Si pour un $j \in \{1,\dots,p\}$ $Z_j = \{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{Z}(p) :\ x_3 = \ldots = x_p = 0$ et $x_1 = x_2\}$, $Z_m = \mathbb{Z}(p)$ pour un $m \in \{1,\dots,p\}$, $m \neq j$ et $Z_i = \emptyset$ pour chaque $i \in \{1,\dots,p\}$, $j \neq i \neq m$, alors seulement l'inclusion $Z_m + Z_m \cap Z_j^0 \subset Z_m \cap Z_j^0$ n'a pas lieu parmi les relations (12″).

Ici, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(a+b)$ soit la fonction de $f(a)$ et $f(b)$ pour une solution de (9), c. à d. pour qu'il existe une fonction ψ telle que

$$f(a+b) = \psi[f(a), f(b)] \qquad \text{pour } a, b \in \mathbb{Z}(p),$$

est suivante

$$f(a) \cdot f(b) = \underline{0}, \quad f(a) = f(c) \ \text{ et } \ f(b) = f(d) \implies f(a+b) = f(c+d) \quad (13)$$

pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{Z}(p)$. Cela désigne que la relation $a\rho b \iff f(a) = f(b)$ est compatible avec l'addition.

Nous allons démontrer que la fonction f donnée par (7) pour la fonction $F(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1\}$ remplit la condition (13). Remarquons d'abord que (7) nous donne pour chaque $k \in \{1, \ldots, p\}$, $(0, \ldots, 0, e_k, \ldots, e_p) \in \mathbb{Z}(p)$ et $e_k \neq 0$

$$f(0, \ldots, 0, e_k, \ldots, e_p) = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0), \qquad (14)$$

donc $f(a) = f(c)$ désigne qu'il existe un k tel que $a_\nu = 0 = c_\nu$ pour $\nu = 1, \ldots, k-1$ et $a_k \neq 0 \neq c_k$ et analogiquement $f(b) = f(d)$ désigne qu'il existe s tel que $b_\mu = 0 = d_\mu$ pour $\mu = 1, \ldots, s-1$ et $b_s \neq 0 \neq d_s$. Nous pouvons supposer que $k \leq s$ et dans ce cas $a_i + b_i = 0 = c_i + d_i$ pour $i = 1, \ldots, k-1$ et $a_k + b_k \neq 0 \neq c_k + d_k$, donc $f(a+b) = (0, \ldots, 0, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0) = f(c+d)$. On peut de même démontrer que notre fonction f remplit (9) et que pour cette fonction

$$Z_k = \{(c_1, \ldots, c_p) \in \mathbb{Z}(p) : \ c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0 \text{ et } c_k \neq 0\}. \qquad (15)$$

On peut faire au sujet de la fonction ψ les remarques analogues comme pour la fonction ϕ en fin de la partie 1.

Remarquons que la fonction f remplissante (9) satisfait au conséquent de (9)

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b) \qquad (16)$$

si et seulement s'il existe au moins un $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $f_k(a) = 1$ pour chaque $a \in \mathbb{Z}(p)$, c. à d. si et seulement s'il existe un $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $Z_k = \mathbb{Z}(p)$ (la démonstration est la même que dans [10] pour les nombres réels). Pour l'ensemble E fini, la fonction F symétrique vérifiant (2) satisfait à (3) si et seulement si la fonction f bien définiée par (7) satisfait à (16), donc si et seulement s'il existe un k tel que $v_k \in F(\mathbf{x})$ pour chaque $\mathbf{x}$ de E^*, alors si et seulement si la condition (5) a lieu.

Nous avons donc le

Théorème 2
Pour l'ensemble E fini la fonction $F\colon E^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n \longrightarrow 2^E \setminus \{\emptyset\}$ satisfait à (3) *pour tous $x, y \in E^*$, si et seulement si elle remplit* (2) *et* (5).

Ce théorème n'est pas vrai pour l'ensemble infini, même si la fonction F est symétrique (voir la fonction (6)).

Puisque $f(x) = (i_1, \ldots, i_p)$ pour $x \in Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p}$, donc nous avons le théorème suivant :

Théorème 3
Pour une solution f de (8)*, $f(a+b)$ est une fonction de $f(a)$ et $f(b)$ si et seulement si*

$$\begin{aligned}&\forall_{(i_1,\ldots,i_p),(j_1,\ldots,j_p)\in O(p)}\ \exists_{(k_1,\ldots,k_p)\in O(p)} :\\ &\qquad Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \subset Z_1^{k_1} \cap \ldots \cap Z_p^{k_p}.\end{aligned} \tag{17}$$

D'après (11) ce théorème est intéressante seulement pour $(i_1 j_1, \ldots, i_p j_p) = \underline{0}$.

Pour les ensembles $Z_1, \ldots, Z_p$ disjoints la condition (11) désigne que ces ensembles sont fermés par rapport à l'addition et la condition (17) est équivalente à la suivante

$$\forall_{i,j\in\{1,\ldots,p\}}\ \exists_{k\in\{1,\ldots,p\}} :\ Z_i + Z_j \subset Z_k.$$

Ces deux conditions sont remplies par exemple par les ensembles (15), ici $k = \min(i,j)$.

La fonction f donnée par (8) ne remplit pas la condition (17). En effet, supposons que pour $(i_1, \ldots, i_p) = (1, 0, \ldots, 0)$ et $(j_1, \ldots, j_p) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ il existe $k_1, \ldots, k_p \in O(p)$ tells que (17) a lieu. Puisque $f(n, 0, \ldots, 0) = (1, 0, \ldots, 0)$ et $f(0, m, 0, \ldots, 0) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ pour n et m entiers et positifs,

$$\begin{aligned}(n, m, 0, \ldots, 0) &= (n, 0, \ldots, 0) + (0, m, 0, \ldots, 0)\\ &\in Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p}\\ &\subset Z_1^{k_1} \cap \ldots \cap Z_p^{k_p},\end{aligned}$$

donc $f(n, m, 0, \ldots, 0) = (k_1, \ldots, k_p)$ pour chaques n et m. Mais, d'après la définition de f on a $f(n, m, 0, \ldots, 0) = (1, 0, \ldots, 0)$ pour $n > m$ et $f(n, m, 0, \ldots, 0) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ pour $n < m$, donc une contradiction.

La fonction f définie par (7) est bien définie puisque elle a les valeurs dans l'ensemble $O(p)$ et de cette raison elle remplit l'équation (9). Elle peut être définie équivalentement aussi comme il suit

$$f_k(a_1, \ldots, a_p) \neq 0 \iff v_k \in F(x_1, \ldots, x_n), \tag{7'}$$

mais si nous considérons la fonction $f = (f_1, \ldots, f_p) \colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow \mathbb{Z}(p)$, donc à valeurs dans $\mathbb{Z}(p)$, telle que seulement (7′) a lieu, cette fonction ne doit pas remplir (9), elle satisfait seulement à la condition

$$f(a) \cdot f(b) \neq \underline{0} \implies \forall_{k\in\{1,\ldots,p\}} (f_k(a+b) \neq 0 \iff f_k(a) \cdot f_k(b) \neq 0) \tag{9'}$$

équivalente à la condition que la fonction $\operatorname{sgn} f$ satisfait à (9), où $\operatorname{sgn} x = 1$ pour $x > 0$ et $\operatorname{sgn} 0 = 0$ et $\operatorname{sgn}(a_1, \ldots, a_p) = (\operatorname{sgn} a_1, \ldots, \operatorname{sgn} a_p)$ pour $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}(p)$. La fonction f vérifiant (9′) doit avoir la forme analogue à (10)

$$f_k(x) \text{ arbitraire positive pour } x \in Z_k \text{ et } f_k(x) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{Z}(p) \setminus Z_k\,, \tag{10'}$$

pour $k = 1, \ldots, p$ et pour les ensembles $Z_1, \ldots, Z_p$ vérifiant les conditions (11) et (12) (la démonstration analogue à celle de [8]). Puisque (9) entraîne (9′), mais pas inversement, il est naturel, mais pas nécessaire, en considérant (9), supposer que f a les valeurs dans $O(p)$. Puisque il existe des solutions de (9) qui ont les valeurs en dehors de $O(p)$, p. ex. pour $p = 2$: $f(n, m) = (2^n, 0)$ pour $n \geq m$ et $f(n, m) = (0, 1)$ pour $n < m$, il est donc interéssant quelles solutions de (9) ont les valeurs seulement dans $O(p)$ (voir [2], [3], [8], [9]). Puisque la fonction $f = (f_1, \ldots, f_p)\colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow \mathbb{Z}(p)$ vérifiant (9) doit avoir la forme

$$f_k(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{pour } x \in Z_k\,, \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{Z}(p) \setminus Z_k\,, \end{cases}$$

où $g_k\colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est telle que

$$g_k(a + b) = g_k(a) \cdot g_k(b)$$

et $Z_1, \ldots, Z_p$ remplissent (11) et (12), donc le théorème 3 est vrai pour cette fonction. Au contraire l'implication ,,si" dans le théorème 3 n'est pas évidemment vraie a cause de (10′) pour la fonction $f\colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow \mathbb{Z}(p)$ satisfaisante à (9′) (l'implication ,,seulement si" est vraie puisque $\operatorname{sgn} f$ satisfait à (9)), mais la condition (13) est nécessaire et suffisante pour que $f(a+b)$ soit une fonction de $f(a)$ et $f(b)$ dans ce cas.

3. Généralisations de la function d'indice

En généralisant ses considérations F.S. Roberts dans [14] remplace l'ensemble $\mathbb{Z}(p)$ des nombres entiers par l'ensemble $\mathbb{Q}(p)$ des suites de p-éléments des nombres rationnels non-négatifs sauf $\underline{0}$ ou par l'ensemble

$$\mathbb{R}(p) = [0, +\infty)^p \setminus \{\underline{0}\}$$

(cela désigne que nous considérons les choix avec les poids – la voix de chaque électeur a un poids rationnel ou réel, pas nécessairement égal à 1).

Les considérations plus haut sont valables aussi pour les ensembles $\mathbb{Q}(p)$ et $\mathbb{R}(p)$ au lieu de $\mathbb{Z}(p)$. Les ensembles Z_k forment dans ce cas des cônes sur le corps des nombres rationnels [9]. De plus, dans le cas de $\mathbb{R}(p)$ au lieu de $\mathbb{Z}(p)$ les ensembles $Z_1, \ldots, Z_p$ dans les exemples 1 et 2 forment les cônes sur $\mathbb{R}$.

Il est intéressant remarquer qu'on ne peut pas remplacer l'inclusion ,,$\subset$" par l'égalité ,,=" dans les conditions (12) et (12′), même, si nous remplaçons

$\mathbb{Z}(p)$ dans ces conditions par $\mathbb{Q}(p)$ ou $\mathbb{R}(p)$. En effet, les ensembles $Z_1 = \mathbb{Z}(p)$ ($\mathbb{Q}(p)$ ou $\mathbb{R}(p)$) et $Z_2 = \ldots = Z_p = \emptyset$ remplissent (11) et (12) (alors aussi (12′)) pour $\mathbb{Z}(p)$ ou $\mathbb{Q}(p)$ ou $\mathbb{R}(p)$ respectivement mais nous avons

$$Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} = \emptyset + Z_1 = \emptyset \neq Z_1^{i_1 j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p j_p} = Z_1$$

pour $i_1 = i_2 = j_1 = 1$, $i_3 = \ldots = i_p = j_2 = \ldots = j_p = 0$, et analogiquement

$$Z_1^1 \cap Z_2^1 + Z_1^1 \cap Z_2^0 = \emptyset + Z_1 = \emptyset \neq Z_1^1 \cap Z_2^0 = Z_1 \,.$$

La même situation a lieu pour la condition (12″) dans le cas de $\mathbb{Z}(p)$, puisque $\mathbb{Z}(p) + \mathbb{Z}(p) \neq \mathbb{Z}(p)$ car $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}(p)$ et $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}(p) + \mathbb{Z}(p)$. Mais si nous considérons la condition (12″) pour $\mathbb{Q}(p)$ ou $\mathbb{R}(p)$, elle implique la condition

$$\begin{aligned} &\forall_{k \in \{1,\ldots,p\}} : \; Z_k + Z_k = Z_k \\ \text{et} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (12''') \\ &\forall_{k,l \in \{1,\ldots,p\},\, k \neq l} : \; Z_k + Z_k \cap Z_l^0 = Z_k \cap Z_l^0 . \end{aligned}$$

En effet, puisque $Z_1, \ldots, Z_p$ vérifiant (12″) (donc aussi (12)) forment les cônes sur $\mathbb{Q}$ ([7]), donc $\frac{1}{2} Z_k^i \subset Z_k^i$ pour chaque $k = 1, \ldots, p$ et $i = 0, 1$ et de là

a) si $x \in Z_k$, alors $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \in Z_k + Z_k$,

b) si $x \in Z_k \cap Z_l^0$, alors $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \in Z_k + Z_l^0$.

La fonction vérifiant (16) satisfait naturellement à (17). On peut aussi voir cela directement. Puisque pour la solution de (16) au moins un $Z_k = \mathbb{R}(p)$ (voir [9]), alors $Z_k^{i_k} = \emptyset$ ou $Z_k^{j_k} = \emptyset$ pour $i_k j_k = 0$, d'où la condition (17) pour $i \cdot j = \underline{0}$ est remplie car dans ce cas

$$Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} = \emptyset .$$

Cette condition n'est pas naturellement nécessaire pour que (17) ait lieu, les considérations plus haut au sujet de la fonction (14) cela montrent.

4. Prolongements

Les généralisations de l'ensemble $\mathbb{Z}(p)$ aux ensembles $\mathbb{Q}(p)$ ou $\mathbb{R}(p)$ impose la question : est-ce que chaque solution de (9) sur $\mathbb{Z}(p)$ possède un prolongement (unique ?) sur $\mathbb{Q}(p)$ (sur $\mathbb{R}(p)$) ?

Pour démontrer la réponse positive dans le cas de $\mathbb{Q}(p)$ nous allons montrer tout d'abord le

Lemme 1

La solution f de (9) sur $\mathbb{Z}(p)$ est stable sur chaque ensemble $\mathbb{Z}(a) = D(a) \cap \mathbb{Z}(p)$, où $D(a) = \{ta : \; t \in (0, +\infty)\}$ pour $a \in \mathbb{Z}(p)$.

Démonstration. Pour chaque $a \in \mathbb{Z}(p)$ il existe un $a^* \in \mathbb{Z}(a)$ tel que $\mathbb{Z}(a) = \{na^* : n \in \mathbb{N}\}$. Nous avons $f(na^*) = f(a^*)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, d'où la thèse.

Théorème 4
Chaque solution de (9) *sur* $\mathbb{Z}(p)$ *possède un prolongement unique sur* $\mathbb{Q}(p)$.

Démonstration. Soit f une solution de (9) sur $\mathbb{Z}(p)$ donnée par (10), et soit $D(a) = \{ta : t \in (0, +\infty)\}$ pour $a \in \mathbb{Q}(p)$. Il existe pour chaque $a \in \mathbb{Q}(p)$ un $b \in \mathbb{Z}(p) \cap D(a)$. Nous posons $g(a) = f(b)$. La définition de la fonction g ne dépend pas du choix de b puisque si $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}(p) \cap D(a)$, alors $D(a) = D(b_1) = D(b_2)$ et $f(b_1) = f(b_2)$, d'après le lemme 1. Pour $c \in \mathbb{Z}(p)$ nous avons $c \in \mathbb{Z}(p) \cap D(c)$, alors $g(c) = f(c)$, donc g est un prolongement de f de $\mathbb{Z}(p)$ sur $\mathbb{Q}(p)$. Nous allons montrer que g remplit (9). Il existe pour $x \in \mathbb{Q}(p)$ un $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \in \mathbb{Z}(p) \cap D(x)$ et dans ce cas $knx \in \mathbb{Z}(p) \cap D(p)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Analogiquement il existe pour $y \in \mathbb{Q}(p)$ un $m \in \mathbb{N}$ tel que $my \in \mathbb{Z}(p) \cap D(y)$ et donc $kmy \in \mathbb{Z}(p) \cap D(y)$, $k \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $mnx \in \mathbb{Z}(p) \cap D(x)$ et $mny \in \mathbb{Z}(p) \cap D(y)$, alors $mn(x+y) \in \mathbb{Z}(p) \cap D(x+y)$ et de là $g(x) = f(mnx)$, $g(y) = f(nmy)$, $g(mn(x+y)) = f(mn(x+y))$.
Si $g(x) \cdot g(y) \neq \underline{0}$, donc $f(nx) \cdot f(my) \neq \underline{0}$, alors $f(mn(x+y)) = f(mnx) \cdot f(nmy)$, d'où $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$.

Soient à présent g_1, g_2 deux solutions de (9) sur $\mathbb{Q}(p)$, étant des prolongements de f. Remarquons que $g(nx) = g(x)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ si g remplit (9). Il existe pour chaque $x \in \mathbb{Q}(p)$ un $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \in \mathbb{Z}(p)$. Nous avons

$$g_1(x) = g_1(nx) = f(nx) = g_2(nx) = g_2(x)$$

et alors le prolongement de f est unique.

Corollaire 1
Chaque solution de (8) *sur* $\mathbb{Q}(p)$ *est stable sur chaque ensemble*

$$\mathbb{Q}(p) \cap \{ta : t \in (0, +\infty)\} \qquad \textit{pour } a \in \mathbb{Q}(p).$$

Cela résulte d'après le lemme 1 de l'unicité du prolongement dans le théorème 4. Il résulte cela aussi de l'équation (9) puisque pour la solution f de cette équation on a $f(qx) = f(x)$ pour chaque $q \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}(p)$.

Nous entendrons dans la suite par *une demi-droite de la direction* ,,a'' l'ensemble $\{(x, ax) : x \in \mathbb{R}(1)\}$ pour a réel, non-négatif et par *la demi-droite de la direction* $+\infty$ l'ensemble $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}(1)\}$. Nous comprenons la direction $+\infty$ comme rationnelle et nous prenons par une demi-droite rationnelle l'intersection de chaque demi-droite de la direction rationnelle avec l'ensemble $\mathbb{Q}(2)$.

Pour donner la réponse partielle au sujet du prolongement de la solution de (9) de $\mathbb{Q}(p)$ à $\mathbb{R}(p)$ nous allons démontrer les deux lemmes.

Lemme 2
La fonction $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{Q}(2) \longrightarrow O(2)$ *(*$\mathbb{R}(2) \longrightarrow O(2)$*) remplit* (9) *si et seulement si les ensembles* Z_i *sur lesquels* $f_i \equiv 1$, $i = 1, 2$, *satisfont aux conditions*

$$\begin{aligned} &Z_i + Z_i \subset Z_i \qquad \textit{pour } i = 1, 2,\\ &Z_1^0 + Z_2 \subset Z_1^0,\ Z_2^0 + Z_1 \subset Z_2^0 \textit{ et } Z_1 \cup Z_2 = \mathbb{Q}(2) \textit{ (ou } \mathbb{R}(2)\textit{)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Rappelons que Z_i^0 désigne le complément de Z_i à $\mathbb{Q}(2)$ (ou à $\mathbb{R}(2)$).
La démonstration du lemme 2 dans le cas $\mathbb{R}(2)$ est donnée dans [9] et elle est analogue pour $\mathbb{Q}(2)$.

Remarquons que la condition première dans (18) désigne que l'ensemble Z_i est fermé par rapport à l'addition et que pour les ensembles Z_1 et Z_2 disjoints (18) est équivalente à la condition

$$Z_i + Z_i \subset Z_i \qquad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } Z_1 \cup Z_2 = \mathbb{Q}(2) \text{ (ou } \mathbb{R}(2)), \tag{19}$$

puisque $Z_1^0 = Z_2$ et $Z_2^0 = Z_1$ dans ce cas.

Lemme 3
Les ensembles différents $Z_1, Z_2 \subset \mathbb{Q}(2)$ *remplissent* (18) *si et seulement s'il existe une demi-droite* D *telle que* Z_1 *est la partie de* $\mathbb{Q}(2)$ *située d'un côté de* D *avec* D *ou non et* Z_2 *se compose des points de* $\mathbb{Q}(2)$ *qui se trouvent de l'autre côté de* D *avec* D *ou non et* $Z_1 \cup Z_2 = \mathbb{Q}(2)$.

Démonstration. La condition „si" est évidente. Si Z_1 et Z_2 remplissent (18) dans ce cas, d'après le corollaire, chaque demi-droite rationnelle est contenue dans Z_i ou elle est disjoint avec Z_i pour $i = 1, 2$. Puisque Z_i est fermé par rapport à l'addition donc l'ensemble des directions des demi-droites rationnelles contenues dans Z_i forme un intervalle I_i dans l'ensemble $[0, +\infty] \cap [\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}]$. Si les ensembles Z_1 et Z_2 sont disjoints, les intervalles I_1 et I_2 sont aussi disjoints et $I_1 \cup I_2 = [0, +\infty] \cap [\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}]$. Il existe alors un $\alpha \in [0, +\infty]$ tel que un de ces intervalles est de la forme $[0, \alpha| \cap [\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}]$ et l'autre de la forme $|\alpha, +\infty] \cap [\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}]$, où α appartient au plus à un de ces intervalles. La demi-droite D dans le lemme c'est la demi-droite de la direction α.
Si les ensembles Z_1 et Z_2 ne sont pas disjoints, il existe seulement une demi-droite rationnelle $D_1 \subset Z_1 \cap Z_2$ (cette demi-droite a naturellement la direction rationnelle). En effet, supposons au contraire qu'il existe deux demi-droites rationnelles différentes D_1 et D_2 dans $Z_1 \cap Z_2$. Il existe dans ce cas un $a \in \mathbb{Q}(2)$ et un $r > 0$ tels que $K(a, r) = K^*(a, r) \cap \mathbb{Q}(2) \subset Z_1 \cap Z_2$, où $K^*(a, r)$ est un disque dans $\mathbb{R}(2)$. Puisque $Z_1 \neq Z_2$, il existe soit un $x \in Z_1 \cup Z_2^0 \cap Z_2$, soit un $x \in Z_1 \cap Z_2^0$. Il existe aussi un $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|qx| < r$, donc $a + qx \in K(a, r)$, alors $a + qx \in Z_2$, mais $qx \in Z_2^0$, d'où $a + qx \in Z_1 + Z_2^0 \subset Z_2^0$ d'après (18). Nous avons une contradiction, il existe donc seulement une demi-droite rationnelle

contenue dans $Z_1 \cap Z_2$ et cette demi-droite joue la rôle de la demi-droite D dans notre lemme.

Théorème 5
Il existe toujours un prolongement de la solution de (9) *pour* $\mathbb{Q}(2)$ *sur* $\mathbb{R}(2)$ *stable sur chaque demi-droite, mais pas unique.*

Démonstration. Soient Z_1 et Z_2 les ensembles déterminés par une solution f de (9) sur $\mathbb{Q}(2)$. Si $Z_1 = Z_2$, on a $Z_1 = Z_2 = \mathbb{Q}(2)$, donc $f \equiv (1,1)$, alors $g \equiv (1,1)$ sur $\mathbb{R}(2)$ est un prolongement de f. Si $Z_1 \neq Z_2$ soit D la demi-droite donnée dans le lemme 3 et α sa direction. Si α est le nombre irrationnel, alors Z_1 et Z_2 sont disjoints et les ensembles $\mathbf{Z}_1 = \operatorname{cl} Z_1$ (la fermeture de Z_1 dans $\mathbb{R}(2)$) et $\mathbf{Z}_2 = \operatorname{cl} Z_2 \setminus D$ forment deux ensembles disjoints remplissants (19) pour $\mathbb{R}(2)$, donc satisfaisants à (18). La même situation a lieu pour les ensembles $\mathbf{Z}_1 = \operatorname{cl} Z_1 \setminus D$ et $\mathbf{Z}_2 = \operatorname{cl} Z_2$, donc l'unicité n'a pas lieu dans se cas.

Si α est rationnelle et

a) $D \subset Z_1 \cap Z_2$, posons $\mathbf{Z}_1 = \operatorname{cl} Z_1$ et $\mathbf{Z}_2 = \operatorname{cl} Z_2$,

b) D est contenue seulement dans Z_1, posons $\mathbf{Z}_1 = \operatorname{cl} Z_1$ et $\mathbf{Z}_2 = \operatorname{cl} Z_2 \setminus D$,

c) D est contenue seulement dans Z_2, posons $\mathbf{Z}_1 = \operatorname{cl} Z_1 \setminus D$ et $\mathbf{Z}_2 = \operatorname{cl} Z_2$.

On voit que les ensembles $\mathbf{Z}_1$ et $\mathbf{Z}_2$ remplissent la condition (18), donc la fonction $g = (g_1, g_2)\colon \mathbb{R}(2) \longrightarrow O(2)$, pour laquelle $g_i(x) = 1$ si et seulement si $x \in \mathbf{Z_i}$ pour $i = 1, 2$, est un prolongement de f sur $\mathbb{R}(2)$.

Ce prolongement ne doit pas être unique aussi de cette raison qu'il existe des solutions de (9) sur $\mathbb{R}(2)$ qui ne sont pas stables sur les demi-droites $D(\alpha)$. Telle est la fonction dans l'exemple suivant.

Exemple 3
Soit g la fonction pour laquelle les ensembles $\mathbf{Z}_1$ et $\mathbf{Z}_2$ sont définis comme il suit. Soit B la base de Hamel des nombres réels sur le corps $\mathbb{Q}$ telle que $1 \in B$ et soit $\mathbf{Z}_1$ l'ensemble des paires $(x, 0) \in \mathbb{R}(2)$ pour lesquelles nous avons des coefficients positifs auprès de 1 dans le développement de x par rapport à cette base B et posons $\mathbf{Z}_2 = \mathbb{R}(2) \setminus \mathbf{Z}_1$. Ces ensembles $\mathbf{Z}_1$ et $\mathbf{Z}_2$ remplissent (19), donc aussi (18) puisque ils son disjoints. Cet exemple montre que l'unicité peut ne pas avoir lieu aussi quand D plus haut est rationnel (ici $D = \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{R}(1)\}$).

Nous tirons le profit de l'axiome de Zermelo du choix dans cet exemple (l'existence de la base de Hamel B). Ce n'est pas par hazard puisque dans le cas de $\mathbb{R}(p)$ les solutions de (9), pour lesquelles toutes les intersections des ensembles $\mathbf{Z}_i$ avec chaque $D(\alpha)$ sont mesurables linéairement au sens de Lebesgue, doivent être stables sur $D(\alpha)$ (voir [9] théorème 3), donc au moins une des intersections en question ne peut pas être mesurable pour notre fonction g de l'exemple plus haut. La même situation n'a pas lieu dans le cas de l'ensemble

$\mathbf{A}(p)$ des suites de p-éléments des nombres algébriques non-négatifs sauf $\underline{0}$. Cela montre pour $p = 2$ la modification h de la fonction g de l'exemple plus haut qui consiste au remplacement de l'ensemble $\mathbb{R}(p)$ par $\mathbf{A}(p)$. Remarquons encore que la fonction g sera un prolongement de h de l'ensemble $\mathbf{A}(2)$ sur $\mathbb{R}(2)$ si la base dans $\mathbf{A}(2)$ sera un sous-ensemble de la base B dans $\mathbb{R}(2)$, considérée dans l'exemple.

On peut montrer d'une manière analogue à la demonstration du théorème 5 qu'il existe toujours un prolongement de la solution de (8) pour $\mathbb{Q}(2)$ sur $\mathbf{A}(2)$ stable sur l'intersection de chaque demi-droite avec $\mathbf{A}(2)$, mais pas unique.

Les **problèmes** du prolongement de la solution de (9) pour $\mathbb{Q}(p)$ à $\mathbf{A}(p)$ ou à $\mathbb{R}(p)$ dans le cas $p > 2$ restent ouverts, en particulier la question si le théorème 5 est vrai pour $p > 2$ est aussi ouverte. Il est aussi ouvert le **problème** du prolongement de la solution de (9) pour $\mathbf{A}(p)$ sur $\mathbb{R}(p)$.

5. Fonction d'indice du domaine restreint

On considère dans [6] l'équation (9) pour a et b tells que

$$a_1 + \cdots + a_p + b_1 + \cdots + b_p \le \alpha, \tag{20}$$

pour un α donné réel et positif (la somme des voix dans l'élection est bornée dans la pratique), c. à d. l'équation conditionnelle de la forme

$$(20) \quad \text{et} \quad f(a) \cdot f(b) \neq \underline{0} \implies f(a+b) = f(a) \cdot f(b) \tag{21}$$

et on a démontré que dans le cas de $\mathbb{R}(p)$ chaque solution de cette équation dernière peut être uniquement prolongée à la solution de (9) (voir [9]) et dans le cas de $\mathbb{Z}(p)$ ce prolongement ne doit pas être unique (voir [10]). Il résulte du corollaire que chaque solution de (21) sur $\mathbb{Q}(p)$ peut être uniquement prolongée sur $\mathbb{R}(p)$. On peut formuler ces résutats comme il suit

Théorème 6
Si pour deux solutions de (9) *pour* $\mathbb{Q}(p)$ *(ou* $\mathbb{R}(p)$*) il existe un* $\alpha > 0$ *tel que ces solutions sont idéntiques sur l'ensemble*

$$\{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Q}(p) : \ a_1 + \cdots + a_p \le \alpha\}$$

(ou sur l'ensemble $\{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}(p) : \ a_1 + \cdots + a_p \le \alpha\}$*),*

elles sont idéntiques sur $\mathbb{Q}(p)$ *(sur* $\mathbb{R}(p)$*).*

Cette situation n'a pas lieu dans le cas de $\mathbb{Z}(p)$, mais il résulte du lemme 1 que si deux solution de (9) pour $\mathbb{Z}(p)$ sont idéntiques sur un sélecteur des demi-droites $D(\alpha) \cap \mathbb{Z}(p)$ pour chaques α rationnels, dans ce cas elles sont égales. On peut prendre pour ce sélecteur par exemple l'ensemble $\{(k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}(p) : k_1,\dots,k_p$ sont premiers entre eux$\}$ et aucun de ces sélecteurs n'est pas borné. L'idéntité de deux solutions de (9) pour $\mathbb{Q}(p)$ sur un sélecteur des demi-droites $D(\alpha) \cap \mathbb{Q}(p)$ suffit naturellement pour qu'elles soient égales sur $\mathbb{Q}(p)$ (voir le corollaire 1), mais dans ce cas il existe des sélecteurs bornés. Au contraire il existe deux solutions de (9) pour $\mathbb{R}(p)$ qui sont idéntiques sur un sélecteur de la famille $D(\alpha)$ et qui ne sont pas égales sur $\mathbb{R}(p)$. Cela montrent pour $p = 2$ les deux fonctions : la fonction g de l'exemple 3 et la fonction h définie comme il suit : $h(a_1,a_2) = (0,1)$ pour $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}(2)$ et $a_2 > 0$ et $h(a_1,0) = (1,0)$ pour $a_1 > 0$, qui sont idéntiques sur le sélecteur $b_1 + b_2 = 1$ et $(b_1,b_2) \in \mathbb{R}(2)$ et ne sont pas idéntiques sur $\mathbb{R}(2)$ tout entier.

On considère dans [12] et dans les travaux postérieurs les solutions de (9) qui ont les valeurs dans l'ensemble $\mathbb{Z}(p)$ (ou $\mathbb{Q}(p)$ ou $\mathbb{R}(p)$) au lieu de $O(p)$. Il existe une solution $f\colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow \mathbb{Z}(p)$ de (8) pour laquelle le lemme 1 n'a pas lieu, c. à d. qui n'est pas stable sur les demi-droites en considération. Telle est la fonction $f(a_1,\dots,a_p) = (2^{a_1},\dots,2^{a_1})$. Le corollaire est vrai pour chaque solution $g = (g_1,\dots,g_p)\colon \mathbb{Q}(p) \longrightarrow \mathbb{Q}(p)$ de (7), c. à d. chaque solution de (9) est stable sur les demi-droites en question, puisque dans ce cas nous avons $g(\mathbb{Q}(p) \subset O(p)$. En effet, nous avons $g_k(qa) = g_k(a)^q \in \mathbb{Q}$ pour chaque $a \in \mathbb{Q}(p)$ et pour chaque q rationnel et positif, d'où si $g_k(a) \neq 0$, alors $g_k(a) = 1$. Il résulte de nos considérations qu'il ne doit pas exister toujours un prolongement de la solution $f\colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow \mathbb{Z}(p)$ de (9) sur $\mathbb{Q}(p)$. Au contraire, chaque solution $g\colon \mathbb{Q}(2) \longrightarrow \mathbb{Q}(2)$ a un prolongement sur $\mathbb{R}(2)$ puisque la démonstration du théorème 5 est valable aussi dans ce cas.

6. Modification

D. Gronau a posé pendant 39-ème International Symposium on Functional Equations [12] la question : quelle est la solution générale de l'équation fonctionnelle conditionnelle

$$f(a) \cdot f(b) = \underline{0} \implies f(a+b) = f(a) \cdot f(b), \tag{22}$$

qui est une modification de l'équation (9) ? La relation $f(a) \cdot f(b) = \underline{0}$ peut être interprétée comme l'orthogonalité des vecteurs $f(a)$ et $f(b)$. Soit $A, B \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbf{A}, \mathbb{R}\}$. La réponse à la question de Gronau donne le

Théorème 7
La fonction $f\colon A(p) \longrightarrow B(p)$ est une solution de (22) si et seulement s'il n'y a pas de deux éléments c et d dans l'ensemble des valeurs de f pour lesquels $c \cdot d = \underline{0}$, c. à d. si et seulement si

$$f(a) \cdot f(b) \neq \underline{0} \qquad \textit{pour chaque } a, b \in A(p), \tag{23}$$

intéressant pour $a \neq b$, alors si et seulement si

$$A(p) \times A(p) \subset (Z_1 \times Z_1) \cup \ldots \cup (Z_p \times Z_p). \tag{23'}$$

Démonstration. S'il existe deux éléments c et d dans l'ensemble des valeurs de f pour lesquels $c \cdot d = \underline{0}$, alors il existe a et b tells que $f(a) = c$ et $f(b) = d$. La fonction f ne peut pas remplir (22) dans ce cas puisque la première partie dans (22) est vraie et $f(a+b) = f(a) + f(b)$ n'a pas lieu (la fonction f ne peut pas prendre de la valeur $\underline{0}$).

La fonction pour laquelle il n'existe pas deux éléments c et d dans l'ensemble de ses valeurs pour lesquels $c \cdot d = \underline{0}$ satisfait a (22) puisque la première partie dans (22) toujours n'a pas lieu dans ce cas.

Il résulte du théorème démontré que chaque fonction $f\colon A(1) \longrightarrow B(1)$ est une solution de (22) pour $p = 1$.

La relation (23) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution de (9) soit en même temps une solution de l'équation (16) (pour $A(p) = \mathbb{R}(p)$ voir [10], la démonstration est analogue pour les autres A). La situation est différente pour une solution de (22). En effet, $f(a) = (2, \ldots, 2)$ pour chaque $a \in A(p)$ est une solution de (22) ne vérifiant pas (23).

On a démontré dans [9] aussi que pour une solution de (9) la relation (23) pour $A(p) = \mathbb{R}(p)$ entraîne que au moins un $Z_k = \mathbb{R}(p)$. Cette situation n'a pas lieu pour la solution de (22) pour $p > 2$. En effet, pour $A(p) = \mathbb{Z}(p)$ soit

$$\begin{aligned}
&Z_1 = \{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}(p) :\ a_1 = 3n \text{ ou } a_1 = 3n+1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}\},\\
&Z_2 = \{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}(p) :\ a_1 = 3n \text{ ou } a_1 = 3n+2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}\},\\
&Z_3 = \{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{Z}(p) :\ a_1 = 3n+1 \text{ ou } a_1 = 3n+2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}\}\\
&\text{et}\\
&Z_4 = \cdots = Z_p = \emptyset.
\end{aligned}$$

On peut vérifier que

$$\mathbb{Z}(p) \times \mathbb{Z}(p) \subset (Z_1 \times Z_1) \cup (Z_2 \times Z_2) \cup (Z_3 \times Z_3) \cup \ldots \cup (Z_p \times Z_p),$$

donc la fonction $f\colon \mathbb{Z}(p) \longrightarrow \mathbb{Z}(p)$ pour laquelle $Z_k = \{a \in \mathbb{Z}(p) :\ f_k(a) \neq 0\}$ pour $k = 1, \ldots, p$, remplit (22) d'après le théorème 7, mais aucun Z_k n'est égal à $\mathbb{Z}(p)$.

Remarquons encore que (23) pour $p = 2$ entraîne que au moins un $Z_k = A(p)$. Supposons contrairement qu'il existe $a, b \in A(p)$ tels que $a \notin Z_1$ et $b \notin Z_2$. Dans ce cas $(a, b) \notin Z_1 \times Z_1$ et $(a, b) \notin Z_2 \times Z_2$ et $(a, b) \in A(p) \times A(p)$, donc une contradiction avec (23). S'il existe un élément a appartenant seulement à un ensemble Z_k $(k \in \{1, \ldots, p\})$, dans ce cas (22) donne $(a, x) \in Z_k \times Z_k$ pour chaque x de $A(p)$, d'où $Z_k = A(p)$. Pour $p = 2$ on a $Z_1 = Z_2$ ou il existe un élément a appartenant seulement à un Z_k $(k = 1, 2)$.

Une fonction $f\colon A(p) \longrightarrow B(p)$ est une solution de (9) et de (22) en même temps si et seulement si elle est une solution de (16). Il existe naturellement des solutions de (9) qui ne sont pas des solutions de (22) et inversement.

On a vu que la fonction $f\colon A(p) \longrightarrow B(p)$ remplit (9) si et seulement si la condition (12) a lieu. Il est donc intéressant remarquer que nous avons le

Théorème 8
La fonction $f = (f_1, \ldots, f_p)\colon A(p) \longrightarrow B(p)$ remplit (22) si et seulement si la modification simple de (12) :

$$\begin{aligned}&(i_1j_1, \ldots, i_pj_p) = \underline{0}\\ &\qquad\Longrightarrow\ Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \subset Z_1^{i_1j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_pj_p}\end{aligned} \tag{24}$$

a lieu pour tous $(i_1, \ldots, i_p), (j_1, \ldots, j_p) \in O(p)$, où

$$Z_k = \{a \in A(p) : \ f_k(a) \neq 0\} \qquad \text{pour } k = 1, \ldots, p.$$

Cette modification (24) désigne d'après la relation $Z_1 \cup \ldots \cup Z_p = A(p)$ que

$$\begin{aligned}&(i_1j_1, \ldots, i_pj_p) = \underline{0}\\ &\qquad\Longrightarrow\ Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \subset Z_1^{0} \cap \ldots \cap Z_p^{0}\\ &\qquad\qquad = A \setminus (Z_1 \cup \ldots \cup Z_p) = \emptyset,\end{aligned}$$

donc elle est équivalente à la condition

$$\begin{aligned}&(i_1j_1, \ldots, i_pj_p) = \underline{0}\\ &\qquad\Longrightarrow\ Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} = \emptyset \text{ ou } Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} = \emptyset\end{aligned} \tag{24$'$}$$

pour tous $(i_1, \ldots, i_p), (j_1, \ldots, j_p) \in O(p)$.

Démonstration. Il suffit de montrer d'après le théorème 7 que la condition

$$\exists_{a,b \in A(p)} : \ f(a) \cdot f(b) = \underline{0} \tag{25}$$

est équivalente à la condition

$$\begin{aligned}&\exists_{(i_1,\ldots,i_p),(j_1,\ldots,j_p) \in O(p)} : \ (i_1j_1, \ldots, i_pj_p) = \underline{0}\\ &\qquad \text{et} \quad Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} \neq \emptyset \ \text{ et } \ Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Pour a et b dans (25) il existe $(i_1, \ldots, i_p), (j_1, \ldots, j_p) \in \{0,1\}^p \setminus \{\underline{0}\}$ tels que

$$a \in Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} \quad \text{et} \quad b \in Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p}. \tag{26}$$

La condition (25) désigne que pour chaque $k \in \{1, \ldots, p\}$: $f_k(a) = 0$ ou $f_k(b) = 0$ et cela désigne que pour chaque $k \in \{1, \ldots, p\}$: $i_k = 0$ ou $j_k = 0$. Cette alternative est équivalente à la condition $(i_1j_1, \ldots, i_pj_p) = \underline{0}$ et la condition (26) désigne que $Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} \neq \emptyset$ et $Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \neq \emptyset$.

Remarquons qu'il suffit vérifier (24′) seulement pour les $2^{-1}(3^p - 2^{p+1} + 1)$ paires $(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_p) \in O(p)$ à cause de la condition $(i_1 j_1, \dots, i_p j_p) = 0$ et par raison de la symétrie.

Pour la fonction f vérifiant (22), $f(a+b)$ soit une fonction de $f(a)$ et $f(b)$ si et seulement si

$$f(a) = f(c) \quad \text{et} \quad f(b) = f(d) \implies f(a+b) = f(c+d)$$

pour chaques $a, b, c, d \in A(p)$ (l'analogie à la condition (13); $f(a) \cdot f(b) \neq \underline{0}$ toujours pour la fonction remplissante (22)).

Constatons que la fonction $F\colon E^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n \longrightarrow 2^E \setminus \{\emptyset\}$ satisfait à l'équation fonctionnelle conditionnelle

$$F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) = \emptyset \implies F(\mathbf{xy}) = F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}), \tag{27}$$

étante une analogie de la condition (2′), si et seulement si chaque paire des valeurs de cette fonction a au moins un element commun ($F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) \neq \emptyset$ pour chaque $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de E^*). Cela ne signifie pas que (5) a lieu (voir la fonction (6)). Si nous remplaçons dans le théorème 2, l'équation (2) par l'équation (22) (en vérité nous rejetons (2) puisque (5) entraine (22)) nous constatons que l'implication ,,seulement si" est vraie dans ce théorème modifié, mais l'implication ,,si" n'a pas lieu. La fonction $F(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{a\}$ cela montre, où a est un element fixé de E. Le théorème analogue au théorème 1 a la forme

Théorème 1′
Il existe pour la fonction F vérifiant (27) *une fonction ϕ satisfaisante à* (4′) *si et seulement si*

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{u}) \quad \textit{et} \quad F(\mathbf{y}) = F(\mathbf{v}) \implies F(\mathbf{xy}) = F(\mathbf{uv})$$

pour chaques $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^*$,
puisque pour $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de E^* on a $F(\mathbf{x}) \cap F(\mathbf{y}) \neq \emptyset$ pour la fonction F vérifiant (27).

S'il s'agit du problème du prolongement des solutions de l'équation (22), il existe toujours ce prolongement pour chaque des ensembles $\mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Q}(p)$, $\mathbf{A}(p)$ sur les ensembles plus vaste, mais pas unique.

Nous savons ([10]) que la fonction $f = (f_1, \dots, f_p)\colon A(p) \longrightarrow B(p)$ vérifiant (9) satisfait à (23) si et seulement s'il existe un $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$Z_k = \{a \in A(p) : \ f_k(a) \neq 0\} = A(p). \tag{28}$$

Cette condition (28) est seulement nécessaire pour que la fonction $f\colon A(p) \longrightarrow B(p)$ vérifiant (22) satisferait en même temps à (23), une condition nécessaire et suffisante (en vérité pas intéressante) est dans ce cas le remplissage par f de l'équation (9).

La fonction $f = (f_1, \dots, f_p)\colon \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ vérifiant (9) et (22) doit satisfaire aussi à (23), donc elle doit avoir la forme ([10])

$$f_k(x) = \begin{cases} \exp a_k(x) & \text{pour} x \in Z_k = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}(p) : \\ & \qquad\qquad \forall_{j \in M_k} : \ x_j = 0\}, \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}(p) \setminus Z_k, \end{cases} \tag{29}$$

où M_k est, pour $k = 1, \dots, p$, un sous-ensemble de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ tel que au moins un M_k, soit M_m, est vide (alors $Z_m = \mathbb{R}(p)$) et $a_k\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction additive. Puisque f satisfait à (22) elle remplit (23) et (24′). On peut voir cela aussi directement puisque $f_m(a) \neq 0 \neq f_m(b)$ pour chaque $a, b \in \mathbb{R}(p) = Z_m$ d'après (29), donc (23) a lieu. Si $i_m j_m = 0$, donc $i_m = 0$ ou $j_m = 0$, alors $Z_m = \mathbb{R}(p)$ implique $Z_m^{i_m} = Z_m^0 = \emptyset$ ou $Z_m^{j_m} = Z_m^0 = \emptyset$, donc (24′) a lieu.

Il résulte de nos considérations que seulement les ensembles $Z_1, \dots, Z_p$ définis dans (29) remplissent les conditions (12), (24′) et

$$Z_1 \cup \ldots \cup Z_p = \mathbb{R}(p), \tag{30}$$

c. à d. les conditions (30) et

$$\forall_{(i_1,\dots,i_p),(j_1,\dots,j_p) \in O(p)} : \ Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \subset Z_1^{i_1 j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p j_p}. \tag{31}$$

Ces ensembles $Z_1, \dots, Z_p$ forment les cônes sur $\mathbb{R}$ et il existe parmi eux tels qui remplissent dans (31) l'égalité au lieu de l'inclusion (p. ex. $Z_k = \mathbb{R}(p)$ (donc $M_k = \emptyset$) pour $k = 1, \dots, p$) et tels qui satisfont seulement à l'inclusion [p. ex. $Z_1 = \mathbb{R}(p)$ (donc $M_1 = \emptyset$), $Z_2 = \ldots = Z_p = \emptyset$ (donc $M_2 = \ldots = M_p = \{1, \dots, p\}$)].

7. Les systèmes des inclusions et des équations des fonctions multivalentes

Il serait intéressant considérer les géneralisations suivantes de (31). Soit T un ensemble arbitraire, $(G, +)$ un groupoïde (un espace vectoriel) et considérons l'inclusion suivante

$$\bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)} + \bigcap_{t \in T} Z(t)^{j(t)} \subset \bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t) j(t)}, \tag{32}$$

où $Z(t)\colon T \longrightarrow 2^G$ est une fonction cherchée, $Z(t)^1 = Z(t)$, $Z(t)^0 = G \setminus Z(t)$ et (32) doit avoir lieu pour chaques fonctions $i(t), j(t)\colon T \longrightarrow \{0, 1\}$ non-idéntiques zéro et les deux généralisations de (12) et de (24)

$$\exists_{t \in T} : \ i(t) j(t) \neq 0 \implies (32) \tag{33}$$

et

$$\forall_{t \in T}: \ i(t)j(t) = 0 \implies (32), \tag{34}$$

qui ont lieu pour chaques (pour deux) fonctions $i(t), j(t)\colon T \longrightarrow \{0,1\}$ non-idéntiques zéro. On peut nommée (32) comme un système des inclusions (un système des inégalités) pour la fonction multivalente $Z(t)$ et (33) et (34) comme un système des inclusions conditionnelles de cette sorte. On peut aussi ajouter ici l'analogue de (30)

$$\bigcup_{t \in T} Z(t) = G. \tag{35}$$

Il se pose le **problème** : quels résultats au sujet de (12), (24) ou (31) (sans ou avec (30)) donnés dans cette note ou dans [3] et [10] sont valables aussi pour (32), (33) et (34) (sans ou avec (35)) ? On peut aussi remplacer dans (32) "$\subset$" par "$=$" dans ce problème (donc considérer l'équation au lieu de l'inégalité).

Par exemple il est vraie la généralisation suivante de l'équivalence (i) et (v) dans le théorème 1 dans [3].

Théorème 9
Soit $(G,+)$ *un groupoïde et* T *un ensemble arbitraire. La fonction* $Z(t)\colon T \longrightarrow 2^G$ *vérifiant* (35) *satisfait à* (33) *si et seulement si*

$$Z(t_1)^{k_1} \cap Z(t_2)^{k_2} + Z(t_1)^{l_1} \cap Z(t_2)^{l_2} \subset Z(t_1)^{k_1 l_1} \cap Z(t_2)^{k_2 l_2} \tag{36}$$

pour chaques $t_1, t_2 \in T$ *et pour chaques* $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \{0,1\}$ *et telles que* $k_1 l_1 + k_2 l_2 \neq 0$.

Remarquons qu'il suffit vérifier (33) seulement pour chaques deux parmi les ensembles $Z(t)$.

Démonstration ,,si". Pour $z \in \bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)} + \bigcap_{t \in T} Z(t)^{j(t)}$ il existe $x \in \bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)}$ et $y \in \bigcap_{t \in T} Z(t)^{j(t)}$ tels que $z = x + y$. Puisque $i(t)j(t)$ n'est pas idéntiquement zéro, il existe un t_0 tel que $i(t_0)j(t_0) \neq 0$. Soit t quelconque de T et posons $k_1 = i(t_0)$, $l_1 = j(t_0)$, $k_2 = i(t)$, $l_2 = j(t)$. Nous avons $k_1 l_1 + k_2 l_2 \neq 0$, donc d'après (36)

$$\begin{aligned} z = x + y &\in Z(t_0)^{k_1} \cap Z(t)^{k_2} + Z(t_0)^{l_1} \cap Z(t)^{l_2} \\ &\subset Z(t_0)^{k_1 l_1} \cap Z(t)^{k_2 l_2} \subset Z(t)^{k_2 l_2} \\ &= Z(t)^{i(t)j(t)}, \end{aligned}$$

alors $z \in \bigcap_{t \in T} Z(t)^{i(t)j(t)}$.

Pour la *démonstration* de ,,seulement si" remarquons que pour chaque a de G et pour chaque t de T il existe exactement un $j_t \in \{0,1\}$ tel que $a \in Z(t)^{j_t}$ (nous allons désigner dans la suite ce j_t par $j_t(a)$) et il existe au moins un u

de T tel que $j_u(a) = 1$. Soit $z \in Z(t_1)^{k_1} \cap Z(t_2)^{k_2} + Z(t_1)^{l_1} \cap Z(t_2)^{l_2}$, donc il existe $x \in Z(t_1)^{k_1} \cap Z(t_2)^{k_2}$ et $y \in Z(t_1)^{l_1} \cap Z(t_2)^{l_2}$ tels que $z = x + y$. Puisque $x \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(x)}$ et $y \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(y)}$, alors $j_{t_1}(x) = k_1$, $j_{t_2}(x) = k_2$, $j_{t_1}(y) = l_1$, $j_{t_2}(y) = l_2$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} z = x + y &\in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(x)} + \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(y)} \\ &\subset \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(x) j_t(y)} \\ &\subset Z(t_1)^{k_1 l_1} \cap Z(t_2)^{k_2 l_2}. \end{aligned}$$

On peut montrer analogiquement comme plus haut le

Corollaire 2
Si la fonction $Z(t)\colon T \longrightarrow 2^G$ *remplit* (33) *et* (35), *elle satisfait à* (35) *avec* T_1 *au lieu de* T *pour chaque* $T_1 \subset T$.

Remarquons qu'on peut toujours prolonger banalement la fonction $Z(t)\colon T \longrightarrow 2^G$ remplissante (33) et (35) à la fonction $Z^*(t)\colon T_2 \longrightarrow 2^G$, où $T \subset T_2$, vérifiant (33) et (35) avec T_2 au lieu de T, en posant $Z^*(t) = G$ pour $t \in T_2 \setminus T$.

Il est vraie aussi la généralisation suivante du lemme 1 de [3]

Théorème 10
Soit $(G, +)$ *un groupoïde uniquement divisible. Si la fonction* $Z(t)\colon T \longrightarrow 2^G$ *remplit* (33) *et* (35), *alors pour chaque sous-ensemble* T_1 *non-vide de l'ensemble* T *et pour chaque fonction* $l(t)\colon T_1 \longrightarrow \{0, 1\}$ *non-idéntique zéro, l'ensemble* $Z = \bigcap_{t\in T_1} Z(t)^{l(t)}$ *forme un cône sur* $\mathbb{Q}$, *c. à d.* $x + y \in Z$ *et* $\frac{n}{k} x \in Z$ *pour* $x, y \in Z$ *et* $n, k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $x, y \in Z$. Puisque la fonction $l : T_1 \longrightarrow \{0, 1\}$ n'est pas idéntiquement zéro il existe $v \in T_1$ tel que $l(v) = 1$. En prenant les notations de la deuxième partie de la démonstration du théorème 9 nous avons $x \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(x)}$ et $y \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(y)}$ et $j_t(x) = j_t(y) = l(t)$ pour $t \in T_1$. De là $j_v(x) = j_v(y) = 1$, donc d'après (33) nous recevons

$$\begin{aligned} x + y &\in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(x)} + \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(y)} \\ &\subset \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t(x) j_t(y)} \subset \bigcap_{t\in T_1} Z(t)^{l(t)^2} \subset \bigcap_{t\in T_1} Z(t)^{l(t)} \\ &= Z. \end{aligned}$$

Soit à présent $x \in Z$ et $k \in \mathbb{N}$. Puisque $\frac{1}{k} x$ appartient à $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t[\frac{1}{k} x]}$, qui est fermé par rapport à „+" d'après la première partie de cette démonstration, donc $x = k(\frac{1}{k}x) \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t[\frac{1}{k}x]}$. Il en résulte que $j_t[\frac{1}{k}x] = l(t)$ pour chaque t de T_1, donc

$$\frac{1}{k}x \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j_t[\frac{1}{k}x]} \subset \bigcap_{t\in T_1} Z(t)^{l(t)} = Z.$$

De là $\frac{n}{k}x = n(\frac{1}{k}x) \in Z$ pour $n \in \mathbb{N}$, puisque Z est fermé par rapport à „+".

On peut aussi généraliser le théorème 3 (c) de [11].

Théorème 11
Soit $(G, +) = (\mathbb{R}(p), +)$ *et prenons les notations et les suppositions du théorème 10. De plus, supposons que* T *est au plus dénombrable et que l'ensemble* $Z_c(t) = \{\alpha c \in Z(t) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$ *est mesurable linéairement au sens de Lebesgue pour chaque* $c \in \mathbb{R}(p)$ *et* $t \in T$*. Dans ce cas, l'ensemble* $\bigcap_{t\in T_1} Z(t)^{l(t)}$ *forme un cône sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. D'après (35) la demi-droite

$$D(c) = \{\alpha c : \ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0\} = \bigcup_{t\in T} Z_c(t),$$

donc il existe au moins un $t_0 \in T$ tel que $Z_c(t_0)$ a la mesure positive. Soit t de T fixé arbitrairement. Puisque

$$Z_c(t_0) = [Z_c(t_0)^1 \cap Z_c(t)^1] \cup [Z_c(t_0)^1 \cap Z_c(t)^0]$$

nous avons deux possibilités

i) $Z_c(t_0) \cap Z_c(t)$ a la mesure positive

ou

ii) $Z_c(t_0) \cap Z_c(t)^0$ a la mesure positive.

Dans le cas i), d'après le théorème de Steinhaus ([17]), il existe un sous-intervalle de $Z_c(t_0) \cap Z_c(t)$ de la longueur positive et de là $Z_c(t_0) \cap Z_c(t) = D(c)$, puisque l'ensemble $Z_c(t_0) \cap Z_c(t)$ forme un cône sur $\mathbb{Q}$ d'après le théorème 9. Il en résulte que $Z_c(t) = D(c)$, donc $Z_c(t)$ forme un cône sur $\mathbb{R}$. Dans le cas ii), $Z_c(t_0) \cap Z_c(t)^0 = D(c)$, d'où $Z_c(t)^0 = D(c)$, alors $Z_c(t) = \emptyset$ forme un cône sur $\mathbb{R}$. Puisque $\bigcap_{t\in T_1} Z(t)^{l(t)}$ forme un cône sur $\mathbb{Q}$, donc il est un cône sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que la supposition que l'ensemble T est dénombrable est essentielle dans le théorème 11. En effet, considérons dans $\mathbb{R}(1)$ la relation ρ suivante : $x\rho y \iff \exists_{w\in\mathbb{Q}} : \ x = wy$. Les classes d'équivalence $Z(t)$ de cette relation pour t dans T (indénombrable) sont dénombrables, donc mesurables et elles forment des cônes sur $\mathbb{Q}$. Puisque elles sont disjointes, elles remplissent (36), donc aussi (33) d'après le théorème 9. Mais elles ne forment pas évidemment des cônes sur $\mathbb{R}$.

Le théorème 11 sera vrai pour T arbitraire (aussi indénombrable) si nous remplaçons la supposition de la mesurabilité des ensembles $Z_c(t)$ par la condition (incommode pour la vérification) : pour chaque $c \in \mathbb{R}(p)$ il existe une fonction $i: T \longrightarrow \{0,1\}$, non-idéntique zéro, telle que l'ensemble $\bigcap_{t\in T} Z_c(t)^{i(t)}$ a la mesure intérieure de Lebesgue positive ou jouit de la propriété de Baire et il est de la deuxième catégorie, puisque dans ce cas $\bigcap_{t\in T} Z_c(t)^{i(t)} = D(c)$ d'après le théorème de Steinhaus ou de Piccard ([7] p. 48), d'où $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)} \cap D(c) = D(c)$. Si $c \in Z(t_0)$, alors $i(t_0) \neq 0$, d'où $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)} \cap D(c) \subset Z(t_0) \cap D(c)$, donc $Z(t_0) \cap D(c) = D(c)$, alors $\alpha c \in Z(t_0)$ pour chaque $\alpha > 0$. Si $c \notin Z(t_0)$, alors $i(t_0) = 0$ et $Z(t_0) \cap D(c) = \emptyset$. Puisque $Z(t_0)$ forme un cône sur $\mathbb{Q}$, il forme un cône sur $\mathbb{R}$, d'où $\bigcap_{t\in T_1} Z(t)^{l(t)}$ forme un cône sur $\mathbb{R}$ pour chaque $\emptyset \neq T_1 \subset T$ et pour chaque $l(t): T_1 \longrightarrow \{0,1\}$ non-idéntique zéro.

Nous allons démontrer le

Lemme 4

Si $Z \subset \mathbb{R}(p)$, $Z + Z \subset Z$, $Z + Z^0 \subset Z^0$ et $Z^0 + Z^0 \subset Z^0$, alors il existe un ensemble $M \subset \{1,\ldots,p\}$ tel que

$$Z = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}(p) : \ \forall_{i\in M} : \ x_i = 0\}.$$

Démonstration. Si $Z = \mathbb{R}(p)$, alors $M = \emptyset$. Si $Z \neq \mathbb{R}(p)$, alors il existe $x_0 \in Z^0$ et de là $x_0 + x \in Z^0$ pour chaque $x \in \mathbb{R}(p)$, d'où

$$\operatorname{Int}\mathbb{R}(p) = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}(p) : \ x_i > 0 \text{ pour } i = 1,\ldots,p\} \subset Z^0, \tag{37}$$

puisque, en supposant au contraire, qu'il existe un $y \in \operatorname{Int}\mathbb{R}(p) \cap Z$, nous constatons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny - x_0 \in \mathbb{R}(p)$, d'où $ny = x_0 + (ny - x_0) \in Z^0$, donc une contradiction avec $ny \in Z$.

Il doit exister un $k \in \{1,\ldots,p\}$ tel que

$$Z \subset \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}(p) : \ x_k = 0\},$$

puisque dans le cas contraire, il existe dans Z des points $(x_1^i,\ldots,x_p^i)$ pour $i = 1,\ldots,p$ tels que $x_i^i \neq 0$ et de là leurs somme appartient à Z et à $\operatorname{Int}\mathbb{R}(p)$, donc une contradiction avec (37). Nous pouvons supposer que $k = 1$. L'ensemble

$$Z_1 = \{(x_2,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}(p-1) : \ (x_1,\ldots,x_p) \in Z\}$$

remplit les conditions $Z_1 \subset \mathbb{R}(p-1)$, $Z_1 + Z_1 \subset Z_1$, $Z_1 + Z_1^0 \subset Z_1^0$ et $Z_1^0 + Z_1^0 \subset Z_1^0$. Si $Z_1 = \mathbb{R}(p-1)$, donc $Z = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}(p-1) : \ x_1 = 0\}$ et la démonstration est finie ($M = \{1\}$). Si $Z_1 \neq \mathbb{R}(p-1)$, donc il existe un $l \in \{2,\ldots,p\}$ tel que

$$Z_1 \subset \{(x_2,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}(p-1) : \ x_l = 0\}$$

d'après le raisonnement plus haut (avec $p-1$ au lieu de p). Nous pouvons prendre $l=2$. En raisonnant comme plus haut nous constatons que $Z \subset \{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}(p):\ x_1=x_2=0\}$, donc $Z=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}(p):\ x_1=x_2=0\}$ et nous avons la thèse ($M=\{1,2\}$) ou $Z\neq\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}(p):\ x_1=x_2=0\}$ et en repetant le raisonnement nous recevons la thèse après le nombre fini des pas.

Nous pouvons à présent démontrer le

Théorème 12
La fonction $Z(t)\colon T\longrightarrow 2^{\mathbb{R}(p)}$ est une solution de (32) *et* (35) *si et seulement si*

$$Z(t)=\left\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}(p):\ \forall_{j\in M(t)}:\ x_j=0\right\},\tag{38}$$

où $M(t)$, pour chaque $t\in T$, est un sous-ensemble de l'ensemble $\{1,\dots,p\}$ tel que au moins un $M(t)=\emptyset$.

Démonstration. La partie ,,si" de la démonstration est evidente. Pour la démonstration de ,,seulement si" nous allons montrer que $Z(t_0)$ remplit les suppositions du lemme 4 pour chaque $t_0\in T$. Nous avons $Z(t_0)+Z(t_0)\subset Z(t_0)$ puisque $Z(t_0)$ forme un cône sur $\mathbb{Q}$. Soit $x\in Z(t_0)+Z(t_0)^0$, donc $x=y+z$, où $y\in Z(t_0)$ et $z\in Z(t_0)^0$. Il existe $i(t)$ et $j(t)$ telles que $y\in\bigcap_{t\in T}Z(t)^{i(t)}$ et $z\in\bigcap_{t\in T}Z(t)^{j(t)}$, d'où $i(t_0)=1$ et $j(t_0)=0$, alors $i(t_0)j(t_0)=0$. Nous recevons $x\in\bigcap_{t\in T}Z(t)^{i(t)j(t)}$ d'après (32), donc $x\in Z(t_0)^0$, c. q. f. d. Nous montrons analogiquement que $Z(t_0)^0+Z(t_0)^0\subset Z(t_0)^0$. Puisque $(1,\dots,1)\in\mathbb{R}(p)=\bigcup_{t\in T}Z(t)$, il existe alors un t_0 tel que $(1,\dots,1)\in Z(t_0)$, donc $M(t_0)=\emptyset$.

Corollaire 3
Si $Z(t)\colon T\longrightarrow 2^{\mathbb{R}(p)}$ remplit (32) *et* (35), *alors $Z(t)$ est un cône sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t\in T$.*

Remarquons que la fonction $f=P_{t\in T}f_t$ (le produit cartésien des fonctions f_t), où

$$f_t(x)\begin{cases}1 & \text{pour } x\in Z(t),\\ 0 & \text{pour } x\in G\setminus Z(t),\end{cases}\tag{39}$$

pour $Z\colon T\longrightarrow 2^G$, remplit (16) ou (9), ou (22), où $\underline{0}=P_{t\in T}0$ et $f(b)f(b)=P_{t\in T}f_t(a)f_t(b)$, si et seulement si $Z(t)$ satisfont aux (32) ou (33), ou (34).

Nous avons le

Corollaire 4
La fonction $f=P_{t\in T}f_t\colon\mathbb{R}(p)\longrightarrow\{0,1\}^T$ remplit (16) *si et seulement si les fonctions f_t ont la forme* (39) *avec $Z(t)$ donnés par* (38).

Remarquons que le corollaire est une généralisation pour T infini du résutat de [11].

Nous avons aussi le

THÉORÈME 13
$Z(t) = \mathbb{R}(p)$ est la seule solution du systeme des équations

$$\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)} + \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j(t)} = \bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)j(t)} \tag{40}$$

et

$$\bigcup_{t\in T} Z(t) = G. \tag{35}$$

Démonstration. On peut facilement montrer que la fonction $Z(t) = \mathbb{R}(p)$ satisfait aux conditions (35) et (40). Si la fonction $Z(t)$ remplit (35) et (40) les ensembles $Z(t)$ forment les cônes sur $\mathbb{R}$ d'après le corollaire 2. Supposons qu'il existe $t_0 \in T$ tel que $Z(t_0) \neq \mathbb{R}(p)$. Il existe dans ce cas un demi-axe du système des coordonnes qui n'est pas contenu dans $Z(t_0)$ ($Z(t_0)$ forme un cône sur $\mathbb{R}$). Nous pouvons prendre que ce demi-axe c'est $X_1 = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}(p) : \ x_2 = \dots = x_p = 0\}$. Nous avons donc

$$x_2 + \dots + x_p \neq 0 \qquad \text{pour } (x_1, \dots, x_p) \in Z(t_0). \tag{41}$$

Soit pour $t \in T_1 : X_1 \subset Z(t)$ (T_1 peut être vide) et pour $t \in T_2 : X_1$ n'est pas contenu dans $Z(t)$, donc $X_1 \subset Z(t)^0$. Posons dans (40), $i(t) = 1$ pour $t \in T_1$ et $i(t) = 0$ pour $t \in T_2$ et $j(t) = 1$ pour $t \in T$. Dans ce cas

$$X_1 \subset \bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)} = \bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)j(t)}.$$

Il en résulte que $(1, 0, \dots, 0) \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)j(t)}$, alors $(1, 0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_p)$ $+(b_1, \dots, b_p)$, où $(a_1, \dots, a_p) \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)}$ et $(b_1, \dots, b_p) \in \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j(t)}$, alors $a_2 + b_2 = \dots = a_p + b_p = 0$, d'où $b_2 = \dots = b_p = 0$. Nous avons une contradiction avec (41) puisque $(b_1, \dots, b_p) \in Z(t_0)$.

On nomme chaque ensemble $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)}$ comme une composante de la famille $Z(T)$ (voir [8] pour T fini). La condition (32) nous suggère qu'on peut définir dans la famille $Z(T)$ des composantes d'une fonction $Z(t)$ vérifiant (32), l'opération $\oplus$ de la manière suivante

$$C_1 \oplus C_2 = \bigcap_{t\in T} Z(t)^{t)j(t)} \tag{42}$$

pour $C_1 = \bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)}$ et $C_2 = \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j(t)}$. Cette définition n'est pas correcte puisque le résultat de l'opération $C_1 \oplus C_2$ peut dépendre de la représentation des composantes C_1 et C_2. En effet, pour $(G, +) = (\mathbb{R}(2), +)$, $T = \{1, 2, 3\}$,

$Z(k) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2) : \ x_k = 0\}$ pour $k = 1, 2$ et $Z(3) = \mathbb{R}(2)$, la fonction $Z(t)$, d'après ce qui prècede, remplit (32), la compopsante $C_1 = \emptyset$ a les deux représentations $Z(1)^1 \cap Z(2)^1 \cap Z(3)^1$ et $Z(1)^1 \cap Z(2)^1 \cap Z(3)^0$ et nous avons pour $C_2 = Z(1)^0 \cap Z(2)^0 \cap Z(3)^1$ d'un côté

$$\begin{aligned} C_1 \oplus C_2 &= Z(1)^1 \cap Z(2)^1 \cap Z(3)^1 \oplus Z(1)^0 \cap Z(2)^0 \cap Z(3)^1 \\ &= Z(1)^0 \cap Z(2)^0 \cap Z(3)^1 \neq \emptyset \end{aligned}$$

et d'autre côté

$$\begin{aligned} C_1 \oplus C_2 &= Z(1)^1 \cap Z(2)^1 \cap Z(3)^1 \oplus Z(1)^0 \cap Z(2)^0 \cap Z(3)^1 \\ &= Z(1)^0 \cap Z(2)^0 \cap Z(3)^1 = \emptyset. \end{aligned}$$

Mais, si nous bornons dans le cas arbitraire de $(G, +)$ seulement aux composantes non-vides nous constatons que la définition (42) est déjà correcte puisque dans ce cas les composantes $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)}$ et $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{j(t)}$ sont disjoints, donc différentes, pour $i(t)$ et $j(t)$ diverses.

En considérant dans l'ensemble des fonctions $T \longrightarrow \{0, 1\}$, pour lesquelles $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)} \neq \emptyset$, l'opération $(i(t), j(t)) \longrightarrow i(t)j(t)$, nous constatons que la fonction $\phi[i] = \bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)}$ est un isomorphisme entre cette opération et l'opération $\oplus$. De même, si nous remplaçons dans (32) l'inclusion „$\subset$" par l'égalité „=" nous constatons que la fonction analogue à la fonction ϕ est un homomorphisme de la famille de toutes les fonctions de T à $\{0, 1\}$ dans la famille de toutes composantes de $Z(T)$, puisque dans ce cas la somme „$\oplus$" des composantes, définie par (42), ne dépend pas de ces représentations.

Remarquons encore que la somme $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)} + \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j(t)}$ de deux composantes ne doit pas être une composante, même si $Z(t)$ remplit (32) et (35). En effet, cette situation a lieu p. ex. pour $(G, +) = (\mathbb{R}(2), +)$, $T = \{1, 2\}$, $Z(1) = \mathbb{R}(2)$ et $Z(2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2) : \ x_2 = 0\}$, $i(1) = i(2) = 1$, $j(1) = 1$ et $j(2) = 0$. La condition (40) n'est pas naturellement remplie dans ce cas. Si, pour une fonction $Z(t)\colon T \longrightarrow 2^G$ vérifiant (32), la somme $\bigcap_{t\in T} Z(t)^{i(t)} + \bigcap_{t\in T} Z(t)^{j(t)}$ forme une composante non-vide, dans ce cas (40) a lieu puisque deux composantes sont idéntiques ou disjoints. Mais au contraire si cette some est une composante vide, elle ne doit pas remplir (38), p. ex. pour $T = \{1, 2\}$, $(G, +) = (\mathbb{R}(2), +)$, $Z(1) = \mathbb{R}(2)$, $Z(2) = \emptyset$, $i(1) = i(2) = j(1) = 1$ et $j(2) = 0$.

Travaux cités

[1] A. Bahyrycz, *The characterization of the indicator plurality function*, Wyż. Szkoła Ped. Kraków. Rocznik Nauk.-Dydakt 196. Prace Matematyczne **15** (1998), 15-35.

[2] A. Bahyrycz, *On a problem concerning the indicator plurality function*, Opuscula Math. **21** (2001), 11-30.

[3] A. Bahyrycz, *Warunkowe równanie funkcji wykładniczej* (L'équation conditionnelle de la fonction exponentielle), These du doctorat, Akademia Pedagogiczna, Kraków, (dactyloscrit), 2002.

[4] A. Bahyrycz, Z. Moszner, *On the indicator plurality function*, Publ. Math. Debrecen **61** (2002), 469-478.

[5] G.L. Forti, L. Paganoni, *Description of the solution of a system of functional equations related to plurality functions: the low-dimensional cases*, Results in Math. **27** (1995), 346-361.

[6] G.L. Forti, L. Paganoni, *A system of functional equations related to plurality functions. A method for the construction of the solution*, Aequationes Math. **52** (1996), 135-156.

[7] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Uniwersytet Śląski, Warszawa – Kraków – Katowice, 1985.

[8] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set Theory*, Polish Scientific Publishers – North-Holland Publishing Company, Warszawa – Amsterdam, 1976.

[9] Z. Moszner, *Sur les fonctions de pluralité*, Aequationes Math. **47** (1994), 175-190.

[10] Z. Moszner, *Remarques sur la fonction de pluralité*, Results in Math. **50** (1995), 387-394.

[11] Z. Moszner, *La fonction d'indice et la fonction exponentielle*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis 13. Studia Math. **2** (2002), 23-37.

[12] Z. Moszner, *Remark:* Dans Report of Meeting. The Thirty-ninth International Symposium on Functional Equations, August 12-18, 2001, Sandbjerg, Denmark, Aequationes Math. **64** (2002), 187.

[13] F.S. Roberts, *Characterisation of the plurality function*, Math. Soc. Sci. **21** (1991), 101-127.

[14] F.S. Roberts, *On the indicator function of plurality function*, Math. Soc. Sci. **22** (1991), 163-174.

[15] F.S. Roberts, *P290*, Aequationes Math. **44** (1992), 124.

[16] Z.S. Rosenbaum, *P290S2*, Aequationes Math. **46** (1993), 317-319.

[17] *Special session on generalized plurality functions*, Dans Report of Meeting.The Twenty-ninht International Symposium on Functional Equations, June 3 – June 10, 1991, Wolfville, Canada, Aequationes Math. **43** (1992), 308.

[18] H. Steinhaus, *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, Fund. Math. **1** (1920), 99-104.

Institute of Mathematics
Pedagogical University
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Poland
E-mail: zmoszner@ap.krakow.pl